OPŠTI TENZORSKI RAČUN

I. upredivanj full

U trodim. prostoru položaj tačke određuje skup od tri broja, koje nazivamo koordinatama. Po analogiji tačku u N dimenzionalnom prostoru određuje skup N – brojeva (ili funkcija) $(x^1, x^2, \dots, x^N)$ u odnosu na izabrani koord. sistem.

Skup tako definisanih tačaka naziva se afini ili n-dimenzionalni prostor koji u opštem slučaju ne mora biti metrički.

Metrički prostor je prostor u kome je definisan pojam rastojanja.

Neki ga zovu Euklidski metrički prostor. (Euclid - prvi odredio rastojanje između 2 tačke)

TRANSFORMACIJA KOORDINATA

Neka su $(x^1, x^2, \dots, x^N)$ i $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^N)$ koordinate jedne tačke u dva različita koord. sistema.

Pretpostavimo da postoje N nezavisne relacije između koordinata ova dva sistema:

$$\bar{x}^1 = \bar{x}^1(x^1, x^2, \dots, x^N)$$
$$\bar{x}^2 = \bar{x}^2(x^1, x^2, \dots, x^N)$$
$$\bar{x}^N = \bar{x}^N(x^1, x^2, \dots, x^N)$$

što se može kraće napisati:

(1) $$\bar{x}^k = \bar{x}^k(x^1, x^2, \dots, x^N) \qquad k = 1, 2, \dots, N$$

Pretpostavka je da su ove f-je svuda diferencijabilne.

Ukoliko jakobijan $J = \left| \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \right| = \frac{1}{J'}$ nije identički jednak nuli onda možemo da napišemo inverzne relacije

(2) $$x^i = x^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^N) \qquad i = 1, 2, \dots, N$$

Relacije (1) i (2) definišu transformaciju koordinata.

Ajnštajnova sumaciona konvencija

Ukoliko se u nekom izrazu isti indeks pojavljuje dva puta i to jednom kao gornji, a jednom kao donji, podrazumeva se sumiranje po tom indeksu.

Pr. $a_i x^i = \sum_{i=1}^{N} a_i x^i = a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_N x^N$

Indeks sumiranja često se naziva "nemim" (dummy [dami] index) indeksom u smislu da suma ne menja vrednost ukoliko zamenimo "nemi" indeks $x_i^j y^i = x_k^j y^k = x_m^j y^m$, t

Napomene:

1) Uvek se mora tačno znati koje vrednosti mogu uzimati indeksi, i ako ništa nije naglašeno treba smatrati da svi indeksi mogu uzimati isti razmak celih brojeva. Npr. u trodim. prost

$$a_i x^i = \sum_{i=1}^{3} a_i x^i = a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3.$$

2) Kod izvoda $\dfrac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}$ indeks "i" smatraćemo donjim indeksom.

Gornji indeks ispod crte smatra se donji

→ logika: $\bar{x}^i = a^i_j x^j$

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = a^i_j$$

$$\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \cdot x^j$$

ovaj mora da je donji

U fizici najčešće radimo sa tzv. linearnim transformacijama oblika:

$$\bar{x}^i = a^i_k x^k + b^i$$

[homogena linearna transformacija bi bila: $\bar{x}^i = \alpha^i_k x^k$]

a^i_k - koeficijenti.

Pr. 1 Translacija sistema:

$$\bar{x}^i = x^i + c^i$$

pri tome su c^i koordinate novog koord. početka.

2 Rotacija sistema

$$\bar{x}^i = \alpha^i_k x^k$$

(ranije smo imali $x_i' = \alpha_{ij} x_j$)

α^i_k -kosinusi pravaca novih koord. osa.

3 Ogledanje (inverzija) koordinata

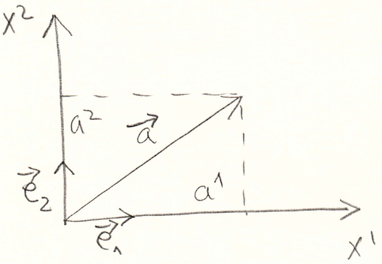
$$\bar{x}^i = - \bar{x}^i$$

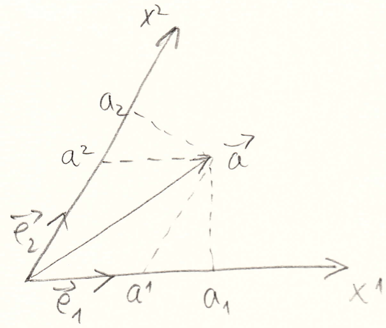
Kovarijantni i kontravarijantni vektori

Radi jednostavnosti posmatrajmo vektor $\vec{a}$ u x^1x^2 – ravni. Sa slike se vidi:

$$\vec{a} = a^1\vec{e}_1 + a^2\vec{e}_2$$

[vektori $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ generalno mogu biti različitih dužina





Ukoliko koord. ose x^1 i x^2 nisu ortogonalne, onda vektor $\vec{a}$ možemo zadati dvojako:

i) razlaganjem po jediničnim bazisnim vektorima kao i ranije tj. pomoću brojeva a^1 i a^2

ii) pomoću ortogonalnih projekcija vektora $\vec{a}$ na koordinatne ose.

Dakle, par brojeva a^1 i a^2 jednoznačno određuje vektor $\vec{a}$. Zato se ovi brojevi mogu nazvati koordinatama vektora i to zvaćemo ih kontravarijantne komponente.

Razmotrimo sada skalarne proizvode:

$$\vec{a}\cdot\vec{e}_1 = a_1 = |\vec{a}|\,|\vec{e}_1|\cos\alpha = \vec{a}\big|_{x_1}\cdot|\vec{e}_1|$$

$\vec{a}\big|_{x_1}$ – označava ortogonalnu projekciju vektora $\vec{a}$ na osu x^1

$$\Rightarrow \quad \vec{a}\big|_{x^1} = \frac{a_1}{|\vec{e}_1|} \quad ; \quad \vec{a}\big|_{x^2} = \frac{a_2}{|\vec{e}_2|}$$

Veličine a_1 i a_2 takođe mogu jednoznačno da odrede vektor i te komponente nazivamo kovarijantne.

Jedan te isti vector malopre u trodim. prostoru može da se razloži prema:

$$\vec{A} = A^1\vec{e}_1 + A^2\vec{e}_2 + A^3\vec{e}_3 = A^k\vec{e}_k$$

$$\vec{A} = A_1\vec{e}^1 + A_2\vec{e}^2 + A_3\vec{e}^3 = A_k\vec{e}^k$$

Kontravarijantne komponente pri rotaciji transformišu se prema rel.

$$A^{i'} \equiv \bar{A}^i = \alpha^i_k A^k$$

dok kovarijantne

$$A'_i = \bar{A}_i = \alpha^k_i A_k$$

Može da se zadrži uvođenje vectora $(\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3)$, tako što se kaže: vector $\vec{A}$ može da se predstavi pomoću kontravarijantne A^i i kovarijantne komponente:

$$\vec{A} = A^i\vec{e}_i$$

$$A_i = \vec{A}\cdot\vec{e}_i$$

Ukoliko generališemo relaciju $\overline{A}^i = \alpha^i_k A^k$:
Kažemo skup od N veličina A^k naziva se kontravarijantan vektor ukoliko se prilikom prelaska iz k.sistema $(x^1, x^2, \dots x^N) \longrightarrow (\overline{x}^1, \overline{x}^2, \dots, \overline{x}^N)$ te veličine transformišu prema relaciji:

$$\boxed{\overline{A}^k = \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} A^i}$$

Za slučaj linearne transformacije $\overline{x}^k = a^k_i x^i + b^k$
imamo: $\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} = a_i^k$ i $\overline{A}^k = a_i^k A^i$
odnosno ukoliko je u pitanju rotacija $\overline{x}^k = \alpha_i^{\ k} x^i$
$\overline{A}^k = \alpha_i^k A^i$.

Tako da možemo reći: Vektori u trodim. Euklidskom prostoru predstavljaju specijalan slučaj kontravarijantnih vektora.

Primetimo da pri ogledanju $\overline{x}^k = -x^k$ i $\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} = -\delta^k_i$
pa je $\overline{A}^k = -\delta^k_i A^i = -A^k$

Dakle samo pravi vektori predstavljaju kontravarijantne vektore.

Analogno skup veličina A_i čini kovarijantan vektor ukoliko se pri transformaciji k. sistema ponaša kao:

$$\overline{A}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i} A_k$$

Skup od n veličina predstavlja vektor u smislu tenzorske algebre, samo ako se ove veličine transformišu po jednom od gornjih zakona, u protivnom to nije vektor.

Primeri: ① Skup diferencijala koordinata: dx^i

Tot. diferencijal je: $d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} dx^k$

poredjem sa sa $\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} A^k$

$\Rightarrow$ da je skup dx^i kontravarijantan vektor.

② Skup parcijalnih izvoda $\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$ prema pravilima za posredno diferenciranje f-ja imamo:

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \quad \text{tj}$$

skalar

Skup $\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$ je kovarijantan vektor.

KONTRAVARIJANTNI, KOVARIJANTNI I MEŠOVITI TENZORI

Ako je N^2 veličina A^{qs} u koord. sistemu $(x^1, x^2, \ldots, x^N)$ povezano sa N^2 drugih veličina $\bar{A}^{pr}$ u drugom k. sistemu $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^N)$ transformacijom

$$\bar{A}^{pr} = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s} A^{qs} \qquad p, r = 1, 2, \ldots N$$

onda kažemo da su to kontravarijantne komponente tenzora drugog reda

N^2 veličina A_{qs} se zovu kovarijantne komponente tenzora drugog <u>reda</u> ako se transformišu:

$$\bar{A}_{pr} = \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^r} A_{qs}$$

Napomena: Broj indeksa naziva se <u>red</u> ili rang tenzora

Slično skup veličina A^q_s ako se transformiše:

$$\bar{A}^p_r = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^s} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^r} A^s_q$$

onda su to komponente mešovitog tenzora i to jedanput kontravarijantan i jedanput kovarijantan.

Ukoliko skup veličina ne zadovoljava ni jedan navedeni ~~zakon~~ onda to nije tenzor.

Ako posmatramo linearnu transformaciju

$$\bar{x}^i = a^i_k x^k + b^i$$

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} = a^i_k \qquad \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^q} = a^j_q$$

$$\Rightarrow \quad \bar{A}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^q} A^{kq} = a^i_k a^j_q A^{kq}$$

Ako se radi o rotaciji a^i_k – predstavlja kosinuse pravaca što znači da se tenzori u trodim. Euklidskom prostoru predstavljaju specijalan slučaj kontravarijantnih tenzora.

Neka je $\Phi = \Phi(x^k)$; $\bar{\Phi} = \Phi(\bar{x}^k)$

Φ je <u>skalar</u> ako je $\Phi = \bar{\Phi}$ a to još se kaže da je tenzor nultog ranga.

– Vektori – tenzori prvog ranga.

Primeri ① skup proizvoda dva kontravarijantna vektora $A^i B^j$ oni se transformišu:

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} A^k \quad ; \quad \bar{B}^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^e} B^e$$

$$\bar{A}^i \bar{B}^j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^e} A^k B^e$$

=> skup $A^i B^j$ čini jedan kontravarijantan tenzor

② Kronekerov simbol ćemo dobiti ako $\frac{\partial x^i}{\partial x^j}$

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \Rightarrow \delta^i_k - \text{je}$$

mešoviti tenzor drugog ranga.

③ skup parcijalnih izvoda $\frac{\partial A_i}{\partial x^j}$

$$\bar{A}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} A_k$$

$$\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} \left[\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} A_k \right] = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} \left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \right) A_k + \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial A_k}{\partial \bar{x}^j}$$

$$= \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} A_k + \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial A_k}{\partial x^p}$$

=> $\frac{\partial A_i}{\partial x^j}$ u opštem slučaju nije tenzor

Međutim u slučaju linearnih transformacija prvi sabirac će otpasti i onda je $\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{x}^j}$ kovarijantan tenzor